

$$\text{א. } V_1 - \text{ נפח של ברינה א'. } V_2 - \text{ נפח של ברינה ב'. ?} \quad \cdot \frac{V_1}{V_2} = ?$$

נסמן x - נפח ליחידת זמן בברינה א' (הספק) ,

לכן: x - גם נפח ליחידת זמן בברינה ב' (הספק), כי הצעירות, כאשר עוברים לברינה ב', עם אותו הספק .

נפח כולל (עובדיה)	נפח ליחידת זמן (הספק)	זמן	
V_1	x	$\frac{V_1}{x}$	צינור אחד ברינה א'
V_2	x	$\frac{V_2}{x}$	צינור אחד ברינה ב'
$\frac{1}{6}V_1$	$4x$	$\frac{V_1}{24x}$	נפח של ברינה א' - 4 צינורות $\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}V_1$	$3x$	$\frac{V_1}{9x}$	נפח של ברינה א' - 3 צינורות $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}V_1$	x	$\frac{V_1}{2x}$	1 נפח של ברינה א' - צינור אחד $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{V_1}{9}$	x	$\frac{V_1}{9x}$	צינור אחד ברינה ב'
$\frac{3V_1}{2}$	$3x$	$\frac{V_1}{2x}$	3 צינורות ברינה ב'

$$\text{ברינה ב' הת מלאה, לכן המשוואה המתאימה} \quad \frac{V_1}{9} + \frac{3V_1}{2} = V_2$$

$$\frac{29}{18}V_1 = V_2$$

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{29}}$$

$$\text{תשובה: } \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{29}$$

בגרות עہ ינואר 18 מועד חורף שאלון 35806/35581

א. נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $d \neq 0$.

$$\begin{aligned} a_7 &= -a_1 \\ a_1 + 6d &= -(a_1 + 16d) \\ a_1 + 6d &= -a_1 - 16d \\ 2a_1 &= -22d \\ a_1 &= -11d \quad * \\ a_1 + 11d &= 0 \\ \boxed{a_{12}} &= 0 \end{aligned}$$

תשובה: $a_{12} = 0$

ב. (1) נבדוק האם קיימ בסדרה איבר שערך שווה ל- $-a_1$.

כל איבר בסדרה חשבונית,

הוא ממוצע חשבוני של איברים הנמצאים באותו "מרחב" בסדרה, לيمין ולשמאל.

a_1 נמצא 11 איברים לפניו, a_{23} נמצא 11 איברים אחרים.

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{a_1 + a_{23}}{2} \\ 0 &= a_1 + a_{23} \\ a_{23} &= -a_1 \end{aligned}$$

(אפשר גם: $\begin{cases} a_1 = a_{12} - 11d = 0 - 11d = -11d \\ a_{23} = a_{12} + 11d = 0 + 11d = 11d \end{cases} a_{23} = -a_1$)

תשובה: כן.

(2) נמצא n טבעי, עבורו מתקיים: $S_n = 0$

$$\begin{aligned} \frac{n[2a_1 + d(n-1)]}{2} &= 0 \quad / : \frac{n}{2} > 0 \\ 2(-11d) + d(n-1) &= 0 \quad \leftarrow * \quad / : d \neq 0 \\ -22 + n - 1 &= 0 \\ \boxed{n = 23} \end{aligned}$$

תשובה: $n = 23$

ג. כל האיברים שלפני $a_{12} = 0$ הם בעלי אותו סימן, וכך גם כל האיברים האחרים (כמובן, עם סימן שונה מאיו שלפני).

תשובה: אין שני איברים עוקבים, עם סימנים שונים, ולכן לא קיימ n טבעי, עבורו $a_n \cdot a_{n+1} < 0$.

ד. אם $a_1 < 0$, אז יהיו 11 איברים שליליים, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$.

אם $a_1 > 0$, אז לאחר a_{12} יהיו רק איברים שליליים, ואולם לא ניתן לדעת את מספרם.

א. הסיכוי של מיכל להטיל 2 בהטלה אחת של הקובייה הוא $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, וכך גם עבור הטלה של 4.

נסמן ב- x את מספר הפעם בקובייה של גלית, עליו רשם המספר 1.

הסיכוי של גלית להטיל 1 בהטלה אחת של הקובייה הוא $\frac{x}{6}$, ולהטיל 3 הוא $\frac{6-x}{6}$.

בסיבוב יחיד, מיכל תנצח - אם תטיל 4, או אם תטיל 2 כאשר גלית תטיל 1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{6} &= \frac{7}{12} \\ \frac{x}{12} &= \frac{1}{12} \\ x &= 1\end{aligned}$$

תשובה: המספר 1 רשום על פאה אחת של הקובייה.

ב. גלית תנצח במשחק של חמישה סיבובים, אם תנצח לפחות בשלושה סיבובים.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n = 5$, $p = \frac{5}{12}$, $k = 3, 4, 5$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) &= \\ \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{5-3} + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{5-4} + \left(\frac{5}{12}\right)^5 &= \\ 10 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{12}\right)^5 &= 0.3466\end{aligned}$$

תשובה: הסיכוי שגלית תנצח במשחק הוא 0.3466.

ב. אם ידוע שגלית תנצח במשחק הראשון, אך עליה לנצח לפחות בשני סיבובים, מתוך הארבעה שנותרו.

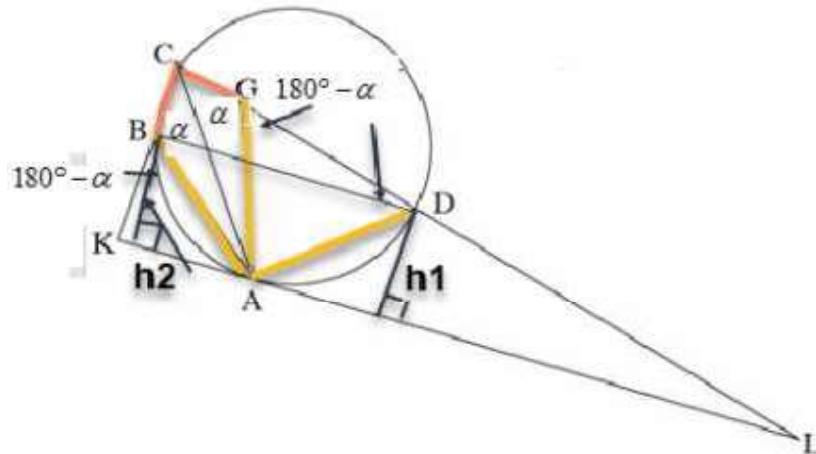
זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n = 5$, $p = \frac{5}{12}$, $k = 3, 4, 5$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$\begin{aligned}P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) &= \\ \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{4-2} + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{4-3} + \left(\frac{5}{12}\right)^4 &= \\ 6 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{12}\right)^4 &= \frac{425}{768} \approx 0.5534\end{aligned}$$

תשובה: הסיכוי שגלית תנצח במשחק, אם ידוע שניצחה בסיבוב הראשון, הוא $\frac{425}{768} \approx 0.5534$.

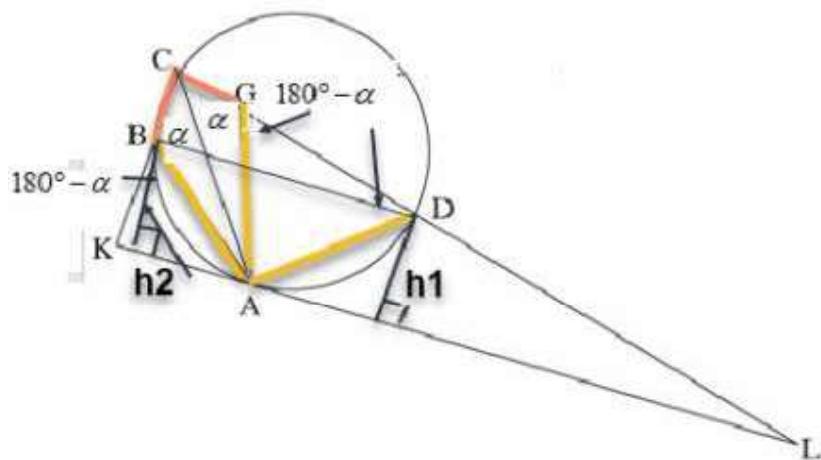
1. ABCD מרובע חסום במעגל . 2. KA משיק למעגל בנקודה A .

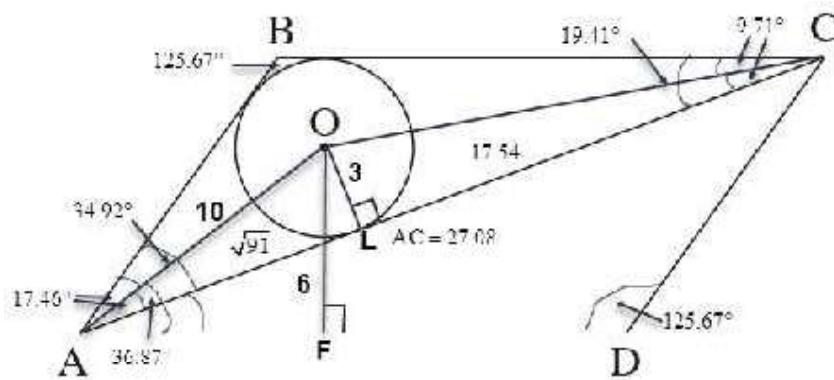


$$\cdot \frac{S_{\Delta LDA}}{S_{\Delta KAB}} = \frac{LA}{AK} \cdot AD^2 = BK \cdot CD \quad (2) \quad (1) \text{ ב. } AD = AG$$

הסבר	טענה	מספר	nymok
5 2	AB = AG	5 2	נתון
6 3	CB = CG	6 3	נתון
6,5	ABCD דלתון	7	שני זוגות שווים של צלעות סמוכות שוות
7 7	∠CBA = ∠CGA = α	8	זוויות צד שווות בדלתון + סימן
8 8	∠DGA = 180° - α	9	זוויות צמודות משילימות ל- 180°
1 1	ABCD מרובע חסום במעגל	10	נתון
10 10	∠CDA = 180° - α	11	זוויות נגדית במרובע חסום במעגל משילימות ל- 180°
11,9	∠CDA = ∠DGA	12	כל המעבר
12 12	AD = AG	13	ב- ΔAGD מול זוויות שווות מונחות צלעות שוות
מ.ש.ל. א			
4	KA משיק למעגל בנקודה A	14	נתון
14	∠KAB = ∠ACB	15	זוית בין משיק למיתר
7	∠ACG = ∠ACB	16	אלכסון ראש חוצה את זוויות הראש בדלתון
16,15	(ת) ∠KAB = ∠ACG	17	כל המעבר
8	∠ABK = 180° - α	18	זוויות צמודות משילימות ל- 180°
11,18	(ת) ∠ABK = ∠CDA	19	כל המעבר
19,17	ΔABK ~ ΔCDA	20	משפט דמיון זוויות זוויות
מ.ש.ל. ב (1)			

הסבר	טענה	נימוק
20	$\frac{AB}{CD} = \frac{AK}{CA} = \frac{BK}{DA}$	21 יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
21	$AB \cdot DA = BK \cdot CD$	22 חישוב
,13 ,5	$AB = AD$	23 כלל המעבר
23 ,22	$AD^2 = BK \cdot CD$	24 הצבה
(2) מ.ש. ב		
23	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB$	25 מול צלעות שוות מנחות זוויות שוות
14	$\sphericalangle KAB = \sphericalangle ADB$	26 זוויות בין משיק למיתר
26 ,25	$\sphericalangle ABD = \sphericalangle KAB$	27 כלל המעבר
27	$BD \parallel KL$	28 אם זוויות מתחלפות שוות אז היסרים מקבילים
	$h1 \perp KL$, $h2 \perp KL$	29 בנייה עזר
29 ,28	$h1 = h2$	30 מרחקים שווים בין ישרים מקבילים
30	$S_{\Delta LDA} = \frac{0.5 \cdot LA \cdot h1}{S_{\Delta KAB}} = \frac{LA}{AK}$	31 נוסחת שטח משולש
מ.ש. ג		





a. חסום מעגל, ולכן O

מפגש חוץ דוויות.

ΔOFA

$$\sin \angle OAF = \frac{OF}{OA} = \frac{6}{10}$$

$$\angle OAF = 36.87^\circ$$

ΔOLA

$$\sin \angle OAL = \frac{OL}{OA} = \frac{3}{10}$$

$$\angle OAL = 17.46^\circ$$

נחשב את דוויות המקבילות.

$$\angle BAD = 17.46^\circ + 36.87^\circ = 54.33^\circ$$

$$\angle ABC = 180^\circ - 54.33^\circ = 125.67^\circ$$

תשובה: $\angle B = \angle D = 125.67^\circ$, $\angle A = \angle C = 54.33^\circ$

b. נחשב את אורך האלכסון AC

$$\angle CAD = 36.87^\circ - 17.46^\circ = 19.41^\circ$$

$$\angle BCA = \angle CAD = 19.41^\circ$$

$$\angle OCL = \frac{19.41^\circ}{2} = 9.71^\circ$$

ΔOCL

$$\tan 9.71^\circ = \frac{OL}{CL}$$

$$CL = \frac{3}{\tan 9.71^\circ}$$

$$CL = 17.54$$

$$AL = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{91}$$

$$AC = \sqrt{91} + 17.54$$

$$AC = 27.08$$

תשובה: $AC = 27.08$

ג. נחשב את שטח המקבילית.

$$\angle BAC = 180^\circ - 125.67^\circ - 19.41^\circ = 34.92^\circ$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{27.08^2 \sin 19.41^\circ \sin 34.92^\circ}{2 \sin 125.67^\circ}$$

$$S_{ABCD} = 171.72$$

תשובה: שטח המקבילית הוא 171.72.

. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ והתחום $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר מכור שפונקציית ה- \cos חיובית בربיע ראשון ורביעי.

$$\cos x > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

תשובה: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(2) אסימפטוטות אנכיות: $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אין נקודות קצה):

$$f'(x) = \frac{\cos x \sqrt{\cos x} - \frac{\sin x(-\sin x)}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}$$

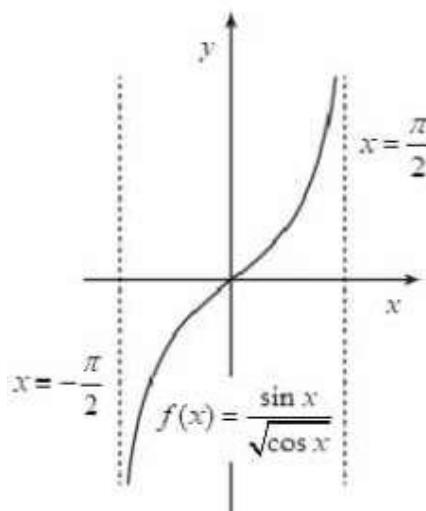
$$f'(x) = \frac{2\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sqrt{\cos x}}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{2\cos x \sqrt{\cos x}}$$

הנגזרת חיובית, בתחום ההגדרה, ולכן הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

תשובה: עלייה: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, ירידה: אף x .

(4) הסקירה המתאימה של $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ ($f(0) = 0$)



ב. נתונה הפונקציה:

$$g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר מכור שפונקציית ה- \sin חיובית בربיע הראשון והשני.

$$\sin x > 0$$

$$[0 < x < \pi]$$

• **תשובה:** $0 < x < \pi$

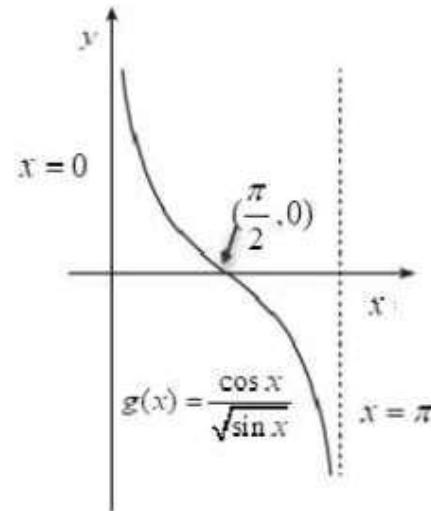
(2) נוכיח: $g(x) = -f(x - \frac{\pi}{2})$

$$-f(x - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\cos(x - \frac{\pi}{2})}} = -\frac{-\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}} = +\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = g(x)$$

תשובה: האחת.

(4) $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = -f(x - \frac{\pi}{2})$, **היא החזזה של** $f(x)$ **ימינה ב** $\frac{\pi}{2}$, **והיפוך סיבוב ציר ה-** x .

• $0 < x < \pi$ **ת رد בתחום ההגדרה** $g(x)$ **ולכן** $g'(x) = -f'(x - \frac{\pi}{2})$



ג. נחשב את האינטגרל המסוים, לפי דיהו הנגזרת הפנימית.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) dx = -2\sqrt{\cos x} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$x = \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{\cos \frac{\pi}{4}}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{\cos(-\frac{\pi}{4})} = -2\sqrt{\cos \frac{\pi}{4}}$$

$$\left. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \right] = 0$$

תשובה: ערך הביטוי הוא 0.

דרך פתרון חילופית

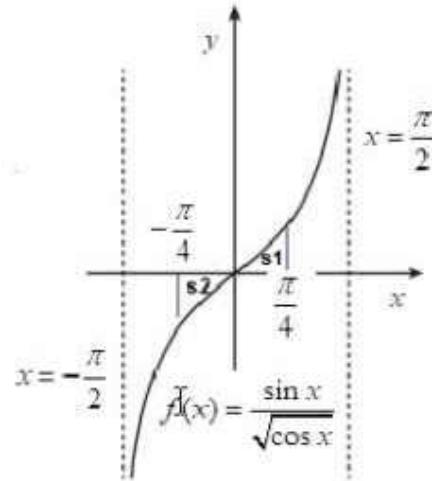
$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{\cos(-x)}}$$

$$f(-x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

מכאן, ש- $f(x)$ פונקציה אי-זוגית.



שני השטחים המסומנים שווים בגודלם, אך אחד מעלה ציר ה- x , והשני מתחת לציר ה- x .

ולכן: ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 0$.

א. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-a}$ ($a \neq 0, 4$ פרמטר).

(1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה אינו מתאפס.

$$x^2 \neq a \rightarrow x \neq \pm\sqrt{a}$$

תשובה: תחום ההגדרה: עבור $x \neq \pm\sqrt{a}$, $a > 0$, עבור $a < 0$ כל x .

(2) בנקודות החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$ ונקודות החיתוך היא

. $(0, -\frac{4}{a})$ ונקודות החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$ ונקודות החיתוך היא

$$(0, -\frac{4}{a}), (2, 0)$$

(3) חזקת המונה (2) שווה לחזקת המכנה (2) ולכן אסימפטוטה אופקית $y=1$

תשובה: $y=1$.

(4) עבור $a > 0$ $x = \pm\sqrt{a}$, $a < 0$ לא מוגדר ומכנה אינו מתאפס.

תשובה: עבור $a < 0$, $x = -\sqrt{a}, x = \sqrt{a}$ אין אסימפטוטה אנכית.

(3) נמצא נקודות קיצון ונקבע את סוגן, עבור $a > 4$, ועבור $a < 4, a \neq 0$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - a}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2 - a) - 2x(x-2)^2}{(x^2 - a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)[x^2 - a - x(x-2)]}{(x^2 - a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2 - a - x^2 + 2x)}{(x^2 - a)^2}$$

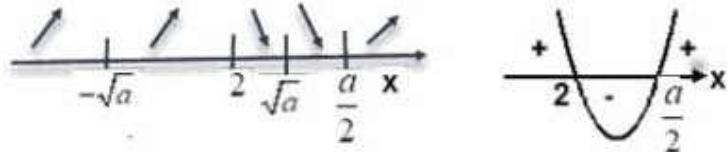
$$f'(x) = \frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2 - a)^2}$$

$$x = 2 \rightarrow (2, 0)$$

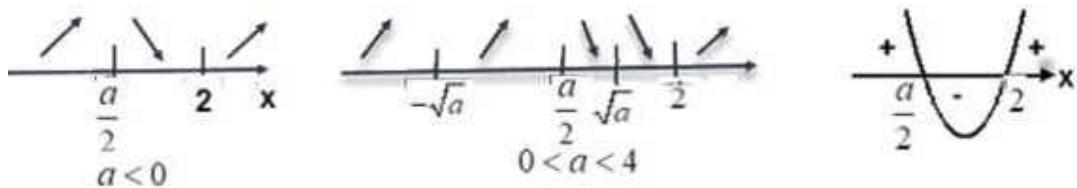
$$x = \frac{a}{2} \rightarrow \left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a} \right) \quad \leftarrow y = \frac{\left(\frac{a}{2}-2\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a} = \frac{\left(\frac{a-4}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4} - a} = \frac{\frac{4(a-4)^2}{4}}{\frac{a^2 - 4a}{4}} = \frac{(a-4)^2}{a(a-4)} = \frac{a-4}{a}$$

סימני הנגזרת נקבעים על פי סימני הפרבולה הישרה (צוחקת) שבמונה.
נבנה גם טבלת עלייה/ירידה, כדי לסייע ג.

עבור $a > 4$ מתתקבל ש- $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a} \right)$ מקסימום, ובהתאם: $(2, 0)$, מינימום.



עבור $a < 4, a \neq 0$ מתתקבל ש- $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a} \right)$ מינימום, ובהתאם: $(2, 0)$, מקסימום.



תשובה: עבור $a > 4$ מקסימום, $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a} \right)$ מינימום.
עבור $a < 4, a \neq 0$ מינימום, $(2, 0)$, מקסימום.

עבור $a < 0$ מינימום, $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a} \right)$ מקסימום.

ג. מהה כל גраф, בהתבסס על תחום ההגדרה, סוג הקיצון, טבלת העלייה/ירידה ועוד.

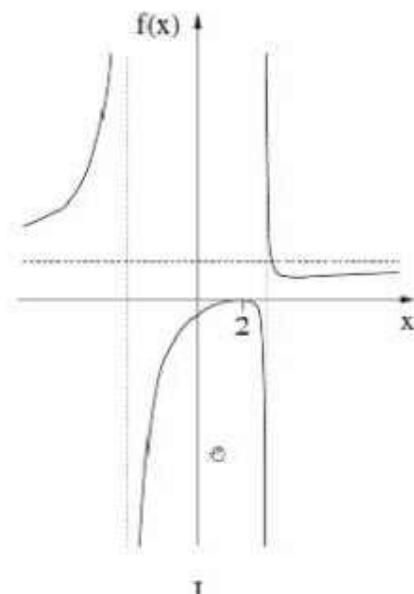
גרף I - $a > 4$

נימוקים:

- (1) מינימום בנקודה $(2, 0)$
- (2) תחומי עלייה וירידה תואמים לטבלה
- (3) שתי אסימפטוטות אנכיות

(4) שיעור ה- y שלילי בנקודה $(0, -\frac{4}{a})$

(5) שיעור ה- y חיובי בנקודה $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$



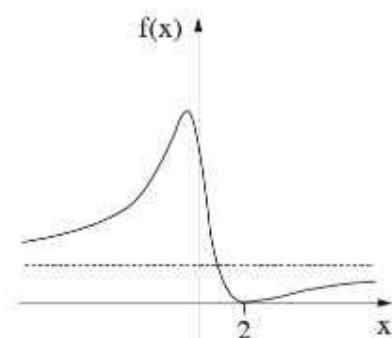
גרף II - $a < 0$

נימוקים:

- (1) מינימום בנקודה $(2, 0)$
- (2) תחומי עלייה וירידה תואמים לטבלה
- (3) גраф רציף ללא אסימפטוטות אנכיות

(4) שיעור ה- y חיובי בנקודה $(0, -\frac{4}{a})$

(5) שיעור ה- y חיובי בנקודה $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$



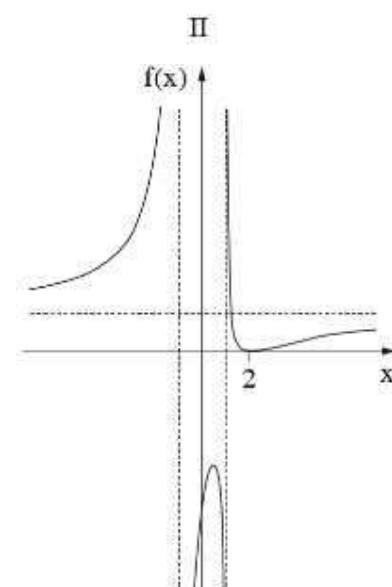
גרף III - $0 < a < 4$

נימוקים:

- (1) מינימום בנקודה $(2, 0)$
- (2) תחומי עלייה וירידה תואמים לטבלה
- (3) שתי אסימפטוטות אנכיות

(4) שיעור ה- y שלילי בנקודה $(0, -\frac{4}{a})$

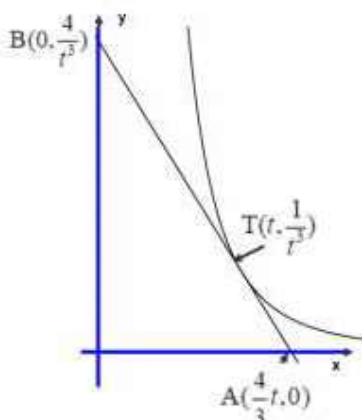
(5) שיעור ה- y שלילי בנקודה $(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a})$



III

בגרות עט ינואר 18 מועד חורף שאלון 35580/35581

א. הפונקציה שיש להביא לאין-אינט היא סכום ניצבי המשולש AOB.



נסמן ב- $T(t, \frac{1}{t^3})$ את נקודת ההשקה.

גרף הפונקציה, בתחום $1 \leq t \leq 5$, חיובי.

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$f'(x) = -3x^{-4} < 0$ ולכן הפונקציה יורדת בתחום.

$f''(x) = 12x^{-5} > 0$ ולכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה (\cup) בתחום.

בהתאם הציור משמאלי.

$$m = -\frac{3}{t^4}, \text{ וSHIPוע המשיק הוא } f'(x) = -\frac{3}{t^4}$$

נמצא את משוואת המשיק: $y - \frac{1}{t^3} = -\frac{3}{t^4}(x - t)$

$$y = -\frac{3}{t^4}x + \frac{4}{t^3}$$

$$0 = -\frac{3}{t^4}x + \frac{4}{t^3} \rightarrow 0 = -3x + 4t \rightarrow x = \frac{4}{3}t$$

בהתאם: $A(\frac{4}{3}t, 0), B(0, \frac{4}{t^3})$

$$S(t) = \frac{4}{t^3} + \frac{4}{3}t \quad \text{פונקציית המטרה:}$$

נקודות קצה בתחום $(1, 5\frac{1}{3}), (5, 6.7) : 1 \leq t \leq 5$

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{-12t^2}{t^6} + \frac{4}{3} = \frac{-36 + 4t^4}{3t^4} \\ -36 + 4t^4 &= 0 \rightarrow t = \sqrt{3} \leftarrow 1 \leq t \leq 5 \\ S(\sqrt{3}) &= 3.08 \end{aligned}$$

בהתאם לערך הפונקציה $S(t)$ בנקודות הקצה ובקיצון הפנימי – מתקיים $x = \sqrt{3}$ מינימום.

תשובה: $x = \sqrt{3}$ מינימום, עבורי סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ב. בהתאם לערך הפונקציה $S(t)$ בנקודות הקצה ובקיצון הפנימי – מתקיים $x = 5$ מקסימום.

תשובה: $x = 5$ מקסימום, עבורי סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.